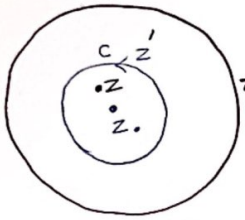
بسط تیلور برای توابع مختلط

بسط $f(z)$ حول نقطه‌ای که در آن نقطه تابع تحلیلی است را بسط تیلور می‌نامیم. می‌خواهیم $f(z)$ را حول $z=z_0$ بسط دهیم، فرض کنید $z=z_1$ نزدیکترین نقطه‌ای باشد که تابع در آن نقطه تحلیلی نیست.



$$\oint f(z')\,dz' = 0$$

نقطه‌ای داخل دایره بنام z در نظر می‌گیریم، z' بایستی z را احاطه کند.

$$\oint_c \frac{f(z')\,dz'}{z'-z} = 2\pi i f(z)$$

خم c دایره‌ای به مرکز z_0 است که z را در بر می‌گیرد.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z')\,dz'}{z'-z} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)-(z-z_0)}$$

چون z داخل z' است $|z-z_0| < |z'-z_0|$ می‌باشد.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)}$$

نکته: $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ اگر $|t|<1$ باشد

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z')\,dz' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \oint \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

بسط تیلور در ناحیه‌ای که در آن $f(z)$ تحلیلی است حول نقطه z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Scanned with CamScanner

اگر $z_0=0$ باشد به آن سری تیلور می‌گوییم.

اگر تکینگی وجود داشته باشد (غیرحذفی) از سری لوران استفاده می‌کنیم.

مثال: تابع زیر را حول $z_0=0$ بسط دهید؟

$$f(z)=\frac{1}{1+z}$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

$$f(z_0)=1$$

$$f^{(1)}(z)=\frac{d}{dz}(1+z)^{-1}=(-1)(1+z)^{-2}\Big|_{z=0}=-1$$

$$f^{(2)}(z)=\frac{d}{dz}\left(-(1+z)^{-2}\right)=2(1+z)^{-3}\Big|_{z=0}=2$$

$$f^{(3)}(z)=\frac{d}{dz}\left(2(1+z)^{-3}\right)=-6(1+z)^{-4}\Big|_{z=0}=-6$$

$$\vdots$$

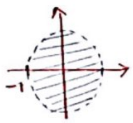
$$f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+2\frac{z^2}{2!}-6\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}(-1)^n n!=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

دایره همگرایی



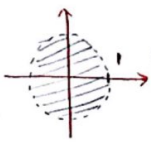
حال می‌خواهیم $\frac{1}{1-z}$ را بسط دهیم، می‌توانیم دوباره مانند بالا از رابطه بسط تیلور استفاده کنیم و جواب را بدست آوریم، یا مطابق زیر عمل می‌کنیم.

حول $z_0=0$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots$$

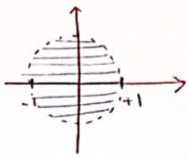
دایره همگرایی



Scanned with CamScanner

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$$

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots$$



دایره همگرایی

مثال: $f(z)=\cos z$ را حول $z=0$ بسط دهید؟

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$f(z) = \cos(0) = 1$$

$$f^{(1)}(z) = -\sin z \Big|_{z=0} = 0$$

$$f^{(2)}(z) = -\cos z \Big|_{z=0} = -1$$

$$f^{(3)}(z) = \sin z \Big|_{z=0} = 0$$

$$f^{(4)}(z) = \cos z \Big|_{z=0} = 1$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

مثال: $f(z)=\dfrac{\cos z}{1-z^2}$ را در $z=0$ بسط دهید؟

$$\frac{\cos z}{1-z^2} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 + z^2 + z^4 + \cdots\right)$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2!}\right) z^2 + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) z^4 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{3}{4} z^4 + \cdots$$

مثال: $f(z)=\cos\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$ را حول $z=0$ بسط دهید؟

$$f(z) = \cos\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

$$\frac{z}{1-z} = \theta = z(1 + z + z^2 + \cdots) = z + z^2 + z^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos\left(\frac{z}{1-z}\right) = 1 - \frac{(z + z^2 + z^3 + \cdots)^2}{2!} + \cdots = 1 - \frac{z^2}{2!} - z^3 + \cdots$$

Scanned with CamScanner

مثال: تابع $f(z)=\frac{1}{(1-z)^{\beta}}$ را حول $z=0$ بسط دهید؟

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-0)^n}{n!}f^{(n)}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

$$f(z)=(1-z)^{-\beta}$$

$$f(z_0)=1$$

$$f^{(1)}(z_0)=\beta(1-z)^{-\beta-1}\Big|_{z=0}=\beta$$

$$f^{(2)}(z_0)=(\beta+1)\beta(1-z)^{-\beta-2}\Big|_{z=0}=\beta(\beta+1)$$

$$f^{(3)}(z_0)=\beta(\beta+1)(\beta+2)(1-z)^{-\beta-3}\Big|_{z=0}=\beta(\beta+1)(\beta+2)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z_0)=\beta(\beta+1)\cdots(\beta+(n-1))=B_n$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}B_n$$

مثال: تابع $f(z)=\ln(1-z)$ را حول $z=0$ بسط دهید؟

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

$$f(z)=\ln(1-z)$$

$$f(z_0)=\ln 1=0$$

$$f^{(1)}(z_0)=\frac{-1}{1-z}\Big|_{z=0}=-1$$

$$f^{(2)}(z_0)=\frac{-1}{(1-z)^2}\Big|_{z=0}=-1$$

$$f^{(3)}(z_0)=\frac{-2}{(1-z)^4}=-2$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z_0)=-(n-1)!$$

$$f(z)=z(-1)+\frac{z^2}{2!}(-1)+\frac{z^3}{3!}(-2)+\cdots$$

$$=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\cdots$$

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

Scanned with CamScanner

نکات مربوط به بسط تیلور:

۱- بسط تیلور در کلیه نقاط داخل دایره‌ای به مرکز z_0 معتبر است. در واقع در داخل قرص $|z-z_0|<R$ این بسط معادل خود تابع می‌باشد که R فاصله z_0 تا نزدیکترین نقطه غیرتحلیلی تابع به z_0 است که به آن دایره همگرایی می‌گویند.

۲- بسط مک لورن برخی توابع مهم که با فرض $z_0=0$ در بسط تیلور به دست می‌آید به صورت زیر می‌باشد که به خاطر سپردن آنها ضروری است.

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \qquad |z|<\infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \qquad |z|<\infty$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \qquad |z|<\infty$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad |z|<1$$

$$(1+z)^n = 1 + \frac{nz}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} z^2 + \cdots$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \qquad |z|<\infty$$

$$tg\, z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \cdots \qquad |z|<\frac{\pi}{2}$$

$$Ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad |z|<1$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 + \cdots \qquad |z|<1$$

$$\sin hz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \qquad |z|<\infty$$

$$\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) \qquad |z|<1$$

۳ـ بسط‌های تیلور رادر "ناحیه همگرایی مشترک" می‌توان باهم جمع، ازهم کم، یادرهم ضرب و یابرهم تقسیم نمود.



اگر بسط حول نقطه z_0 همگرا باشد.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} g^{(n)}(z_0)$$

$$g^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}{}^* g^{(n)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*-z_0)^n}{n!} g^{(n)}(z_0)$$

درنتیجه داریم: $g^*(z) = g(z^*)$ که به آن اصل انعکاس شوارتز می‌گویند.

دراین شرایط هرگاه تابع * راخواستیم کافی است z را به z^* تبدیل کنیم.

Scanned with CamScanner